Musterlösung

Vorüberlegung 1:

Kein Verlust bedeutet „Gewinn $\geq$ Null“: $G(x) = E(x) - K(x) \geq 0$

Gewinnzone beginnt bei $E(x) - K(x) = 0$

oder $p \cdot x - K(x) = 0$

oder nach p aufgelöst $p = \frac{K(x)}{x} = k(x)$

$\Longrightarrow$ Der minimale Verkaufspreis p ist auch das Minimum der Stückkostenfunktion $k(x) = \frac{K(x)}{x}$.

Vorüberlegung 2:

Maximaler Gewinn liegt vor, wenn $G'(x) = 0$, d.h. wenn die Gewinnfunktion ein Extremum hat

$$\big(E(x) - K(x)\big)' = 0$$

oder $\big(p \cdot x - K(x)\big)' = 0$

oder $p - K'(x) = 0$

$$\Longrightarrow \; p = K'(x)$$

$\Longrightarrow$ Der maximale Gewinn ergibt sich, wenn x so gewählt wird, dass $p = K'(x)$

Lösung Aufgabe a)

Gegeben: Kostenfunktion: $K(x) = \frac{2}{45}x^3 - 2x^2 + 60x + 600$

Gesucht: Minimaler Verkaufspreis = minimale Stückkosten *(siehe Vorüberlegung 1)*

Lösung: Stückkostenfunktion: $k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{\frac{2}{45}x^3 - 2x^2 + 60x + 600}{x} = \frac{2}{45}x^2 - 2x + 60 + \frac{600}{x}$

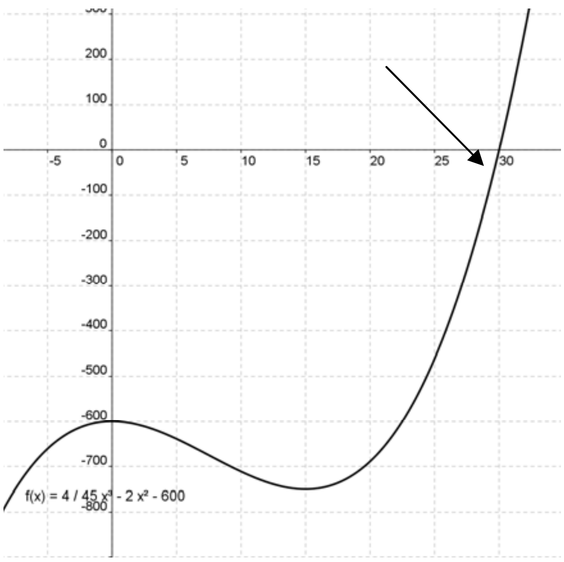
Minimum der Stückkostenfunktion durch Nullsetzen der Ableitungsfunktion:

$$k'(x) \overset{!}{\cong} 0$$

Ableiten per Hand und Nullsetzen der Ableitungsfunktion: $k'(x) = \frac{4}{45}x - 2 - \frac{600}{x^2} \overset{!}{\cong} 0$

mit x^2 durchmultiplizieren: $\frac{4}{45}x^3 - 2x^2 - 600 = 0$

Plotten der Funktion $\frac{4}{45}x^3 - 2x^2 - 600$ mit Geogebra liefert Nullstellen:

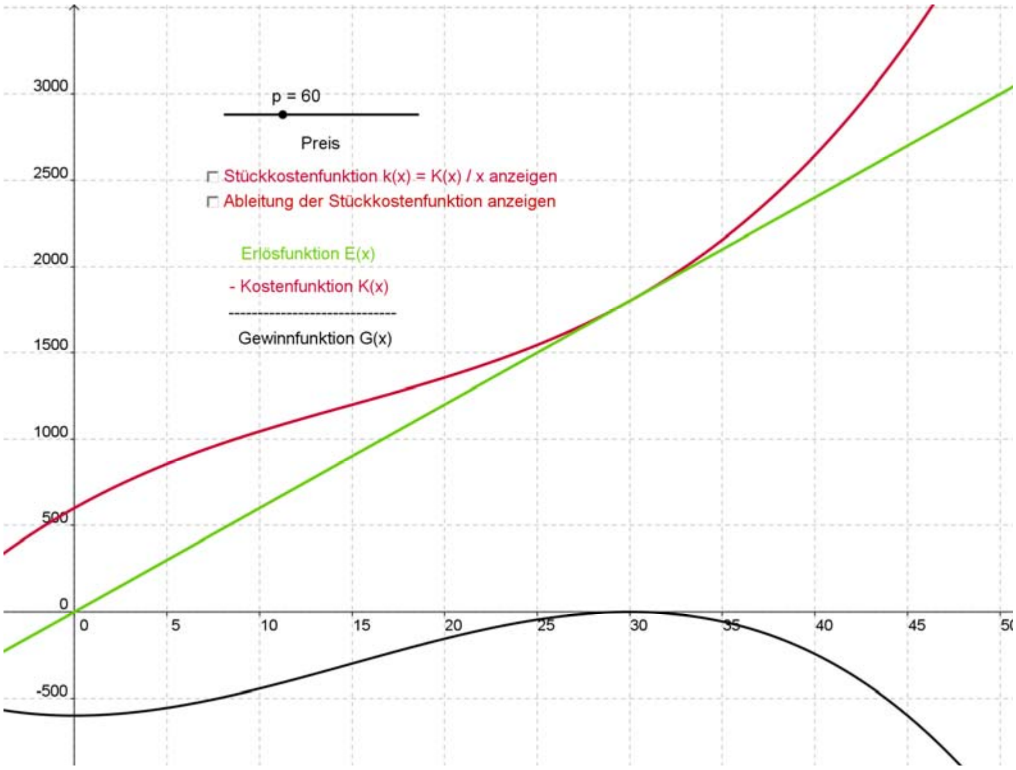


$$\Longrightarrow x_{min} = 30$$

$$p_{min} = k(30) = 60\text{ €}$$

Das Unternehmen hat bei einer Stückzahl von 30 Einheiten die minimalen Stückkosten von 60 €.

$\Longrightarrow$ Der Mindestpreis liegt bei **60 €.**



Lösung Aufgabe b)

$$G(x) = E(x) - K(x) = 150x - \left(\frac{2}{45}x^3 - 2x^2 + 60x + 600\right) = -\frac{2}{45}x^3 + 2x^2 + 90x + 600$$

$$G'(x) = -\frac{6}{45}x^2 + 2x + 90 \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \cdots$$

$x_1 = 45$ $\quad$ ($x_2 = -15$) nicht sinnvoll

$\Longrightarrow$ Der maximale Gewinn (für einen Verkaufspreis von p = 150 €) wird bei einer **Stückzahl von x = 45** erzielt