Skript zur Vorlesung II

Gebrochen-rationale Funktionen

Allgemeine Form: $f(x) = \frac{\mathrm{a}}{x - \mathrm{c}} + \mathrm{d} \qquad \mathrm{a}, \mathrm{c}, \mathrm{d} \in \mathbb{R}$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$

Maximale Definitionsmenge: $D_{\max} = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, da der Nenner für $x = -2$ Null wird
$\Rightarrow$ senkrechte Asymptote $x = -2$

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+2} - 3 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} - 3$

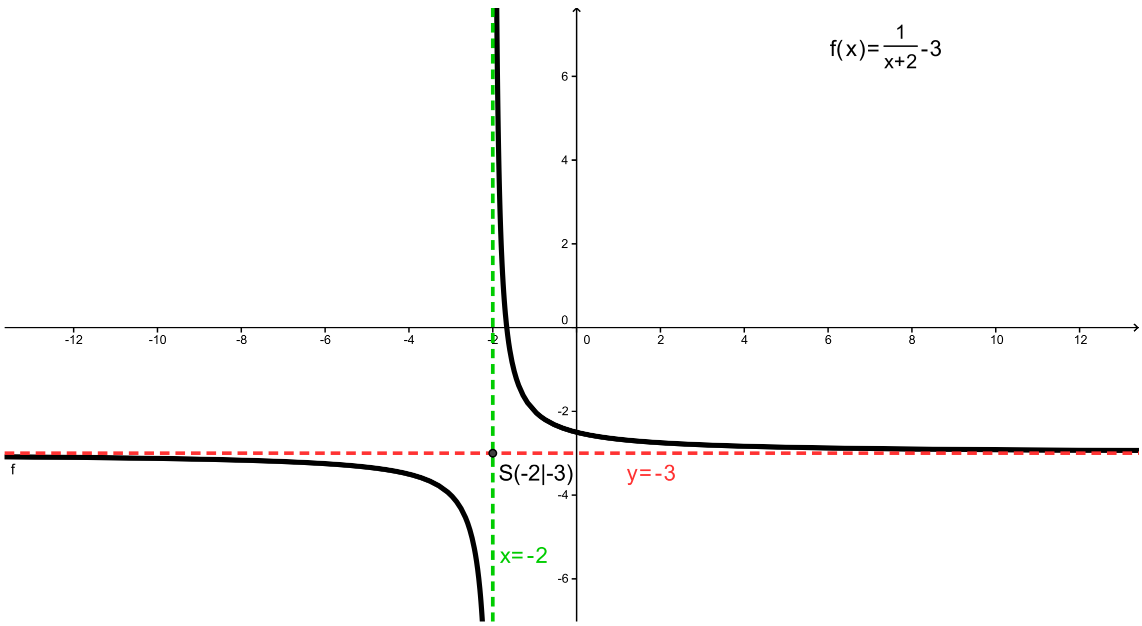
$= \frac{"0"}{1} - 3 = -3$

$\Rightarrow$ waagrechte Asymptote $y = -3$
$\Rightarrow$ Wertemenge $W = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$

Nullstelle(n):
$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{x+2} - 3 = 0 \iff \frac{1}{x+2} = 3$$
$$\iff 1 = 3 \cdot (x+2) \iff 1 = 3x + 6$$
$$\iff -5 = 3x \iff x = -1\tfrac{2}{3}$$

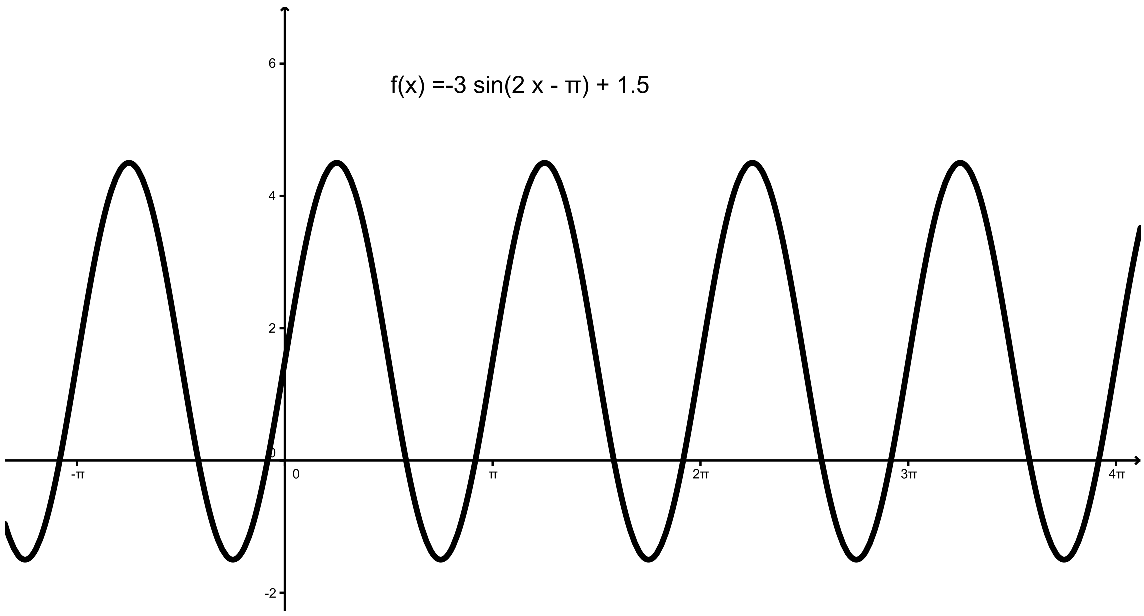
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{1}{0+2} - 3 = \frac{1}{2} - 3 = -2,5$
$\Rightarrow (0| - 2,5)$

Graph: Hyperbel - gegenüber der „Normal“hyperbel $y = \frac{1}{x}$ um 2 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach unten verschoben
$\Rightarrow$ Symmetriezentrum $S(-2| - 3)$



Trigonometrische Funktionen

Allgemeine Form:	$s(x) = \mathrm{a} \cdot \sin[\mathrm{b} \cdot (x - \mathrm{c})] + \mathrm{d} \qquad \mathrm{a} \neq 0, \mathrm{b}, \mathrm{d} \in \mathbb{R}; \mathrm{c} \in \mathbb{R}^+$ $k(x) = \mathrm{a} \cdot \cos[\mathrm{b} \cdot (x - \mathrm{c})] + \mathrm{d} \qquad \mathrm{a} \neq 0, \mathrm{b}, \mathrm{d} \in \mathbb{R}; \mathrm{c} \in \mathbb{R}^+$
Beispiel:	$f(x) = -3 \cdot \sin(2x - \pi) + 1,5$
Amplitude:	$\lvert\, \mathrm{a} \,\rvert = \lvert -3 \rvert = 3$
Periode:	$\frac{2\pi}{\mathrm{b}} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
Wertemenge:	$W = [-1,5\,;4,5]$, denn $W_{f(x)=\sin(x)} = [-1\,;1]$, Amplitude 3 und um 1,5 nach oben verschoben
Nullstelle(n):	$f(x) = 0 \iff -3 \cdot \sin(2x - \pi) + 1,5 = 0$ $\iff -3 \cdot \sin(2x - \pi) = -1,5$ $\iff \sin(2x - \pi) = 0,5$ $2x - \pi = \frac{1}{6}\pi + \mathrm{k} \cdot 2\pi \quad \vee \quad 2x - \pi = \frac{5}{6}\pi + \mathrm{k} \cdot 2\pi \quad (\mathrm{k} \in \mathbb{Z})$ $2x = \frac{7}{6}\pi + \mathrm{k} \cdot 2\pi \qquad 2x = \frac{11}{6}\pi + \mathrm{k} \cdot 2\pi$ $x = \frac{7}{12}\pi + \mathrm{k} \cdot \pi \qquad x = \frac{11}{12}\pi + \mathrm{k} \cdot \pi$
Schnittpunkt mit der y-Achse:	$f(0) = -3 \cdot \sin(2 \cdot 0 - \pi) + 1,5 = -3 \cdot \sin(-\pi) + 1,5$ $= -3 \cdot 0 + 1,5 = 1,5$ $\Rightarrow (0 \vert 1,5)$
Graph:	Sinuskurve - gegenüber $y = \sin(x)$ erst um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben, dann mit dem Faktor 2 in x-Richtung gestaucht, daraufhin mit dem Faktor $\lvert a \rvert = 3$ in y-Richtung gestreckt und an der x-Achse gespiegelt und schließlich um 1,5 nach oben verschoben



Exponentialfunktionen

Allgemeine Form: $f(x) = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a}^x + \mathrm{d} \qquad \mathrm{a} \neq 1 \in \mathbb{R}^+; \mathrm{b} \neq 0, \mathrm{d} \in \mathbb{R}$

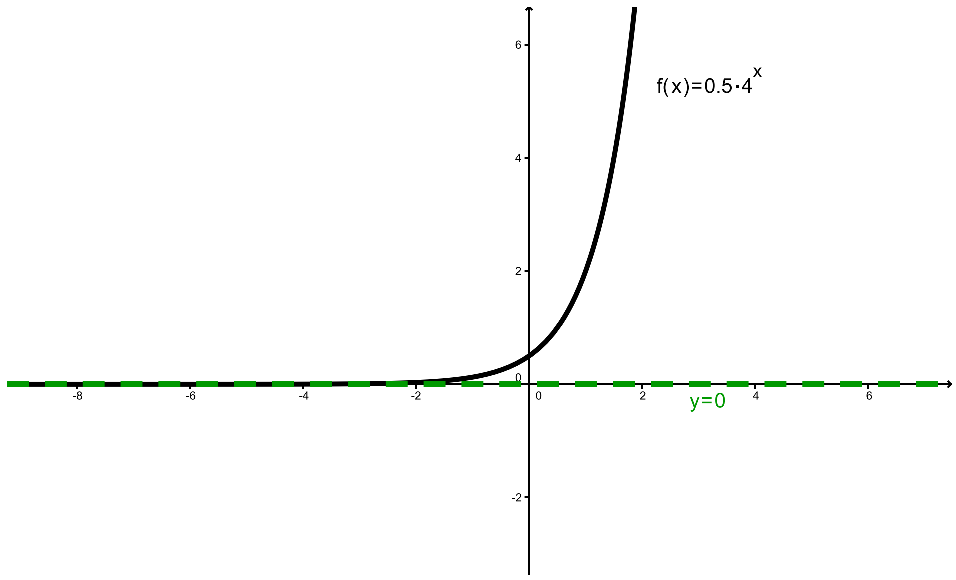
Beispiel: $f(x) = 2 \cdot 4^{x-1}$

Umformen: $f(x) = 2 \cdot 4^{x-1} = 2 \cdot 4^x \cdot 4^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4^x = 0,5 \cdot 4^x$
$\Rightarrow$ exponentielles Wachstum mit dem Wachstumsfaktor
a = 4 und dem Anfangswert b = 0, 5

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \Rightarrow$ waagrechte Asymptote $y = 0$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Nullstelle(n): $f(x) = 0 \iff 0,5 \cdot 4^x = 0 \iff 4^x = 0$
$\iff x = \log_4 0$ nicht definiert!
$\Rightarrow$ G_f besitzt keine Nullstelle.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0,5 \cdot 4^0 = 0,5 \cdot 1 = 0,5$
$\Rightarrow (0|0,5)$



Logarithmen

Wie oben bereits verwendet ist die eindeutige Lösung der Gleichung $\mathrm{a}^x = \mathrm{b}$ (für $\mathrm{a} > 0$, $\mathrm{a} \neq 1$, $\mathrm{b} > 0$) der Logarithmus von b zur Basis a:

$$x = \log_\mathrm{a} \mathrm{b}$$

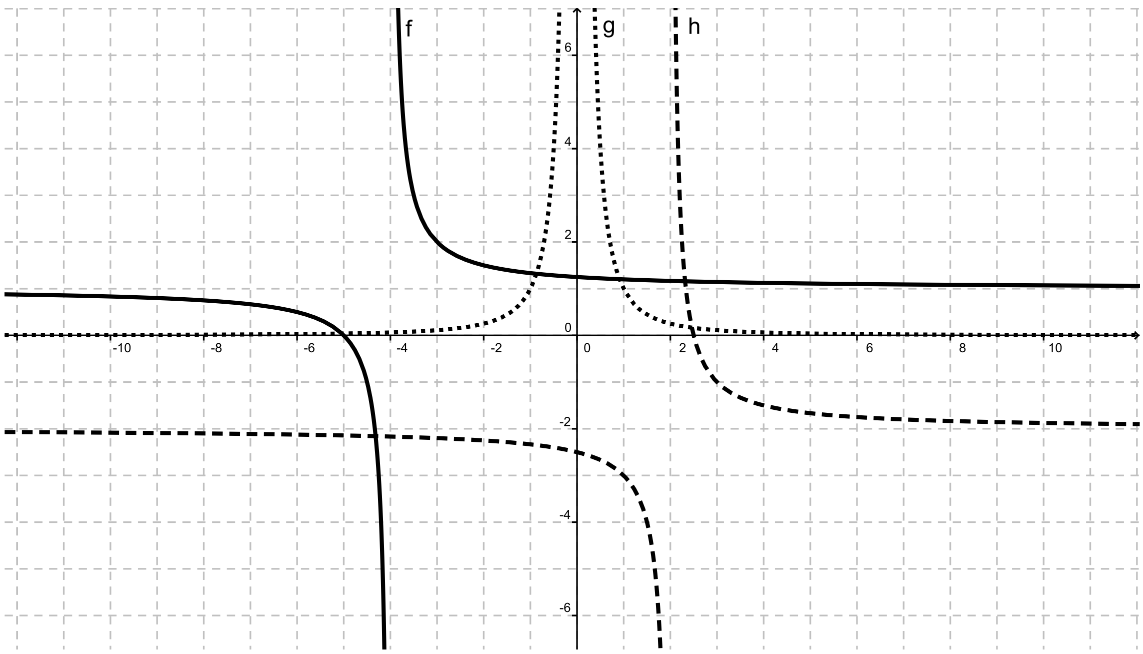
Für das Rechnen mit Logarithmen gelten folgende Rechengesetze:

$$(1) \quad \log_\mathrm{a}(\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}) = \log_\mathrm{a} \mathrm{u} + \log_\mathrm{a} \mathrm{v}$$
$$(2) \quad \log_\mathrm{a}(\mathrm{u} : \mathrm{v}) = \log_\mathrm{a} \mathrm{u} - \log_\mathrm{a} \mathrm{v}$$
$$(3) \quad \log_\mathrm{a}(\mathrm{u}^x) = x \cdot \log_\mathrm{a} \mathrm{u}$$

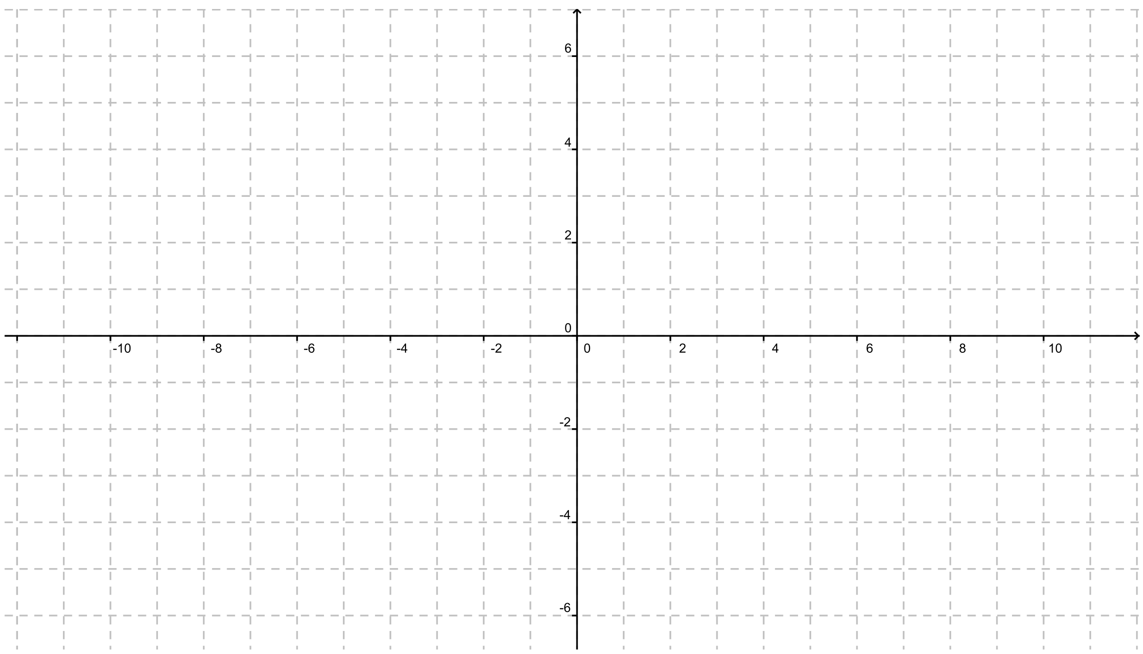
Umrechnungsformel: $\log_\mathrm{a} \mathrm{u} = \frac{\lg \mathrm{u}}{\lg \mathrm{a}}$

Aufgaben:

1. Gib für jeden Funktionsgraphen einen passenden Funktionsterm an!

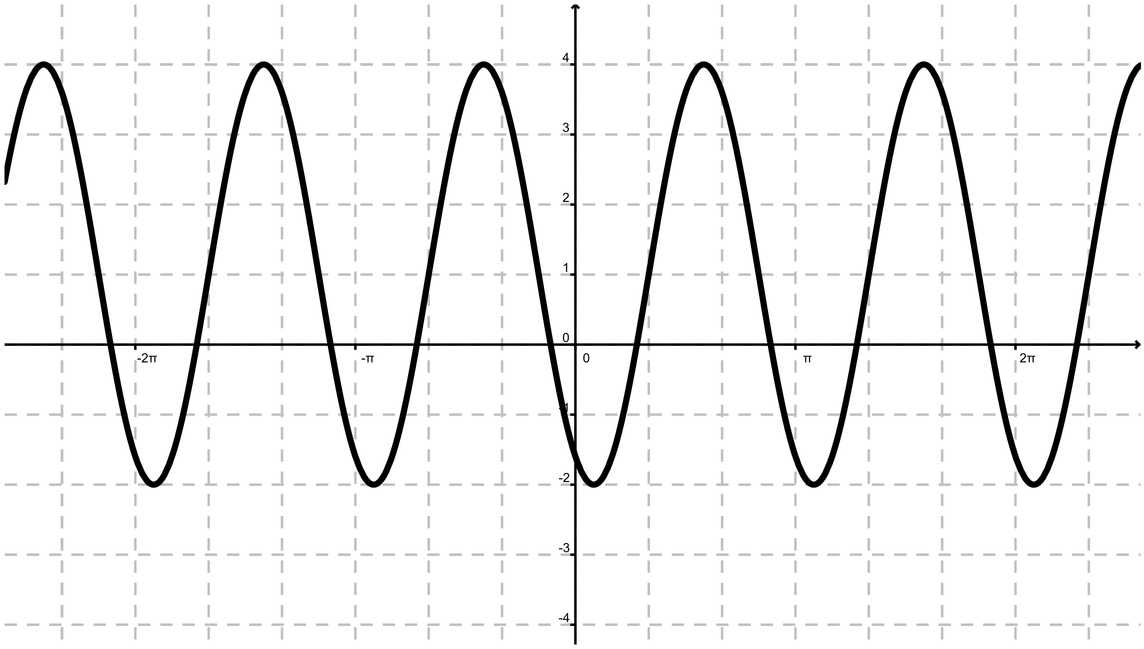


2. Skizziere die Graphen folgender Funktionen: $f(x) = \dfrac{2}{1+2x}$ und $g(x) = \dfrac{-1}{x-3}$

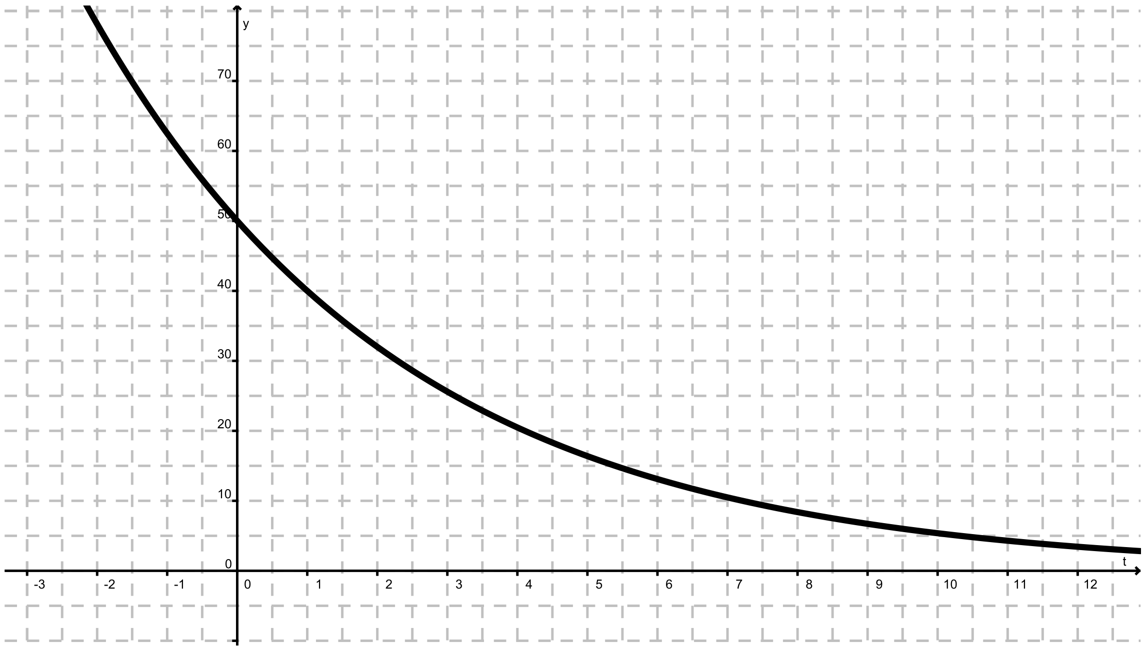


3. Für welche Winkel $x \in [-\pi; 4\pi]$ gilt
   a) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ c) $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -0,6134$?
   Gib die Winkel im Grad- und Bogenmaß an!

4. Der abgebildete Graph gehört sowohl zu einer Funktion $f(x) = \mathrm{a} \cdot \sin[\mathrm{b}(x + \mathrm{c})] + \mathrm{d}$ als auch zu einer Funktion $g(x) = \mathrm{a} \cdot \cos[\mathrm{b}(x + \mathrm{c})] + \mathrm{d}$. Bestimme jeweils a, b, c und d passend zum Graphen!



5. Das Bild zeigt den Graphen einer Exponentialfunktion $f(\mathrm{t}) = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{t}}$. Bestimme a und b. Lies am Graphen die Halbwertszeit ab und bestätige diesen Wert durch Rechnung.



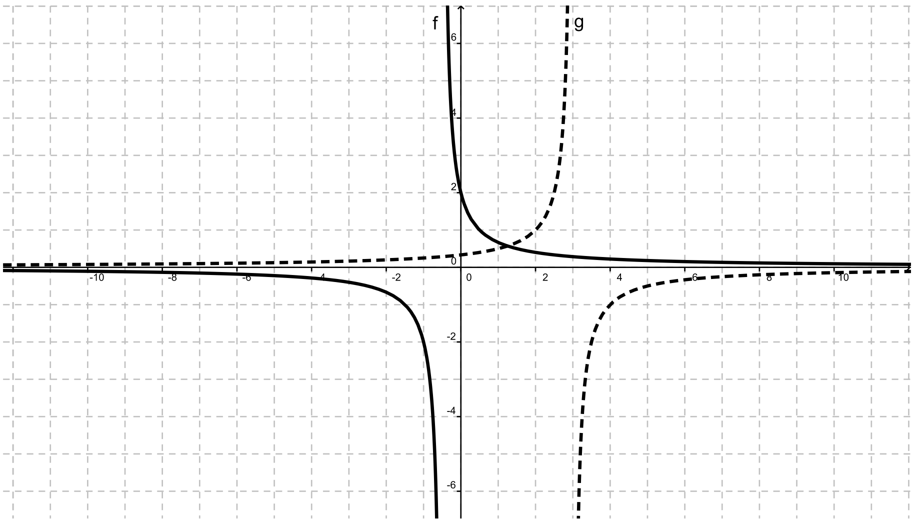
6. Bestimme die Exponentialfunktion $y = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$, deren Graph durch folgende Punkte geht.
   a) P(0|6) und Q(1|2) b) P(−2|5) und Q(2|20)

7. Löse folgende Gleichungen.
   a) $4^x = 0,125$ b) $0,5^{x-5} = 15$ c) $7^{3x+2} = 10^x$

Lösungen:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+4} + 1$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad h(x) = \dfrac{1}{x-2} - 2$

2. $f(x) = \dfrac{2}{1+2x} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+x}$ und $g(x) = \dfrac{-1}{x-3}$ (Spiegeln an der y-Achse!))



3. a) $x = \frac{\pi}{4}$ $\left(\frac{3}{4}\pi;\ \frac{9}{4}\pi;\ \frac{11}{4}\pi\right)$ bzw. $x = 45°$ $(135°;\ 405°;\ 495°)$
   b) $x = -\frac{5}{6}\pi$ $\left(\frac{5}{6}\pi;\ \frac{7}{6}\pi;\ 2\frac{5}{6}\pi;\ 3\frac{1}{6}\pi\right)$ bzw. $x = -150°$ $(150°;\ 210°;\ 510°;\ 570°)$
   c) Der Taschenrechner liefert $\frac{x}{2} \approx -37,84°$.
   $\Rightarrow x \approx -1,32$ $(7,60;\ 11,25)$ bzw. $x \approx -75,68°$ $(435,68°;\ 644,32°)$

4. sin: a=3; b=2; c=$-\frac{1}{3}\pi$ oder c=$+\frac{2}{3}\pi$ (jeweils $+k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)); d=1
   cos: a=3; b=2; c=$-\frac{7}{12}\pi$ oder c=$+\frac{5}{12}\pi$ (jeweils $+k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)); d=1

5. $f(\mathrm{t}) = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{t}}$ $\qquad \mathrm{b} = f(0) = 50$
   $f(1) = 40 \quad \Rightarrow \quad 40 = 50 \cdot \mathrm{a}^1 \qquad \mathrm{a} = 0,8$
   $f(\mathrm{t}) = 50 \cdot 0,8^{\mathrm{t}}$
   Abgelesene Halbwertszeit: $\mathrm{t} \approx 3,1$
   Bestätigung: $f(3,1) = 50 \cdot 0,8^{3,1} \approx 25$

6. a) $f(x) = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$
   $f(0) = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 6$
   $f(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 6 \cdot \mathrm{a}^1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} = \frac{1}{3}$
   $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

   b) $f(-2) = 5 \quad \Rightarrow \quad$ (I) $\mathrm{b} \cdot \mathrm{a}^{-2} = 5$
   $f(2) = 20 \quad \Rightarrow \quad$ (II) $\mathrm{b} \cdot \mathrm{a}^2 = 20$
   (II):(I) $\quad \mathrm{a}^4 = 4$
   $\Rightarrow \quad \mathrm{a} = \sqrt{2}$
   in (II) $\mathrm{b} \cdot 2 = 20 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{b} = 10$
   $f(x) = 10 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^x = 10 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$

7. a) $2^{2x} = 2^{-3} \quad \Rightarrow \quad x = -1,5$
   b) $0,5^x \cdot 0,5^{-5} = 15$
   $0,5^x = 0,46875$
   $x = \dfrac{\lg 0,46875}{\lg 0,5} \approx 1,093$
   c) $(3x+2) \cdot \lg 7 = x$
   $x = \dfrac{2 \cdot \lg 7}{1 - 3 \cdot \lg 7} \approx -1,1$