Skript zur Vorlesung I

Grundlagen:
Eine Funktion f ordnet jedem Element x aus einer Menge D_f (Definitionsmenge von f) eindeutig ein Element y (Funktionswert) zu

Funktionsvorschrift	f: $x \rightarrow f(x)$, $x \in D$	$x \rightarrow -0{,}5x^2 + x + 1$
Funktionsterm:	f(x)	$-0{,}5x^2 + x + 1$
Funktionsgleichung:	y = f(x)	$y = -0{,}5x^2 + x + 1$

In der **Wertetabelle** werden x-Werte und zugehörige Funktionswerte tabellarisch aufgeführt

Die **Wertemenge** W_f besteht aus allen Funktionswerten einer Funktion

Graph:

Jedem Paar (x/y) mit y=f(x) kann ein Punkt P(x/y) in einem kartesischen Koordinatensystem zugeordnet werden. Die Menge aller Punkte heißt Graph G_f von f.

Eigenschaften

Nullstellen: f(x)=0

Schnittpunkt mit der y-Achse: S(0/f(0))

Schnittpunkt zweier Graphen: f(x) = g(x)

Monotonie: Streng monoton steigend: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Symmetrie:

f(-x)=f(x) : Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse
f(-x)=-f(x): Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Lineare Transformationen:

Gegeben sei der Graph G_f der Funktion f; man erhält daraus den Graph G_g der Funktion g mit

- g(x) =-f(x), indem wir G_f an der x-Achse spiegeln
- g(x)=f(-x), indem wir G_f an der y-Achse spiegeln
- g(x) = f(x) + a, indem wir G_f in Richtung der y-Achse um a verschieben
- g(x) = f(x-a), indem wir G_f in Richtung der x-Achse um a verschieben
- g(x) = a·f(x) und a > 0, indem wir G_f in Richtung y-Achse mit dem Faktor a strecken bzw. stauchen
- g(x) = f(a·x) und a>0, indem wir G_f in Richtung der x-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ stauchen bzw. strecken

Lineare Funktionen $f(x)=mx+t$

Beispiel: $f(x)=-\frac{2}{3}x+2$
Max. Definitionsmenge: D = R
Max Wertemenge: W = R

Nullstelle(n): → f(x) = 0 $-\frac{2}{3}x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$

Schnittpunkt S_y mit der y-Achse:

$f(0)=-\frac{2}{3}\cdot 0+2=2 \Rightarrow S_y(0/2)$

Graph: Gerade mit der Steigung $m=-\frac{2}{3}$ und dem y-Achsenabschnitt $t=2$

Quadratische Funktionen

Normalform: $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_s)^2+y_s$
Scheitelform allg.: $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$

Nullstellenform: $f(x) = a(x-N^1)(x-N^2)$
Beispiel:

Normalform: $f(x)=0{,}5x^2-2x+1$
Quadratische Ergänzung!

$$f(x)=0{,}5\cdot(x^2-4x+2)=0{,}5\cdot(x^2-4x+4-4+2)=0{,}5\cdot(x-2)^2-1$$

$\Rightarrow$ Scheitel: $S(2/-1)$ Quadratische Ergänzung!

Max. Definitionsmenge: D = R
Max Wertemenge: W = [-1; ∞]

Nullstelle(n): $f(x)=0$

$0{,}5\cdot(x-2)^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}5\cdot(x-2)^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2=2$

$x_{1/2}-2=\pm\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2}=\pm\sqrt{2}+2$

Nullstellenform des Beispiels:

$f(x) = (x-(\sqrt{2}+2))(x-(-\sqrt{2}+2))$

Schnittpunkt S_y mit der y-Achse: $f(0)=0{,}5\cdot 0-2\cdot 0+1=1 \quad \Rightarrow \quad S_y(0/1)$

Graph: Normalparabel $(y=x^2)$, mit dem Faktor 0,5 gestaucht, um 2 Einheiten nach rechts und um 1 Einheit nach unten verschoben
(Achsensymmetrisch zu x=2, da um 2 Einheiten nach rechts verschoben)

Ganzrationale Funktionen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

Beispiel: $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 = 2 \cdot (x^4 - x^3 - 2x^2)$

Max. Definitionsmenge: D = R
Max Wertemenge: W = R

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} 2x^4 = +\infty$$

keine Symmetrie des Graphen zum Koordinatensystem,

da $f(-x) = 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$

Nullstelle(n): $f(x) = 0$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - x - 2) = 0$$
$$x^2 \cdot (x-2) \cdot (x+1) = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = -1; x_{2/3} = 0; x_4 = 2$$

Schnittpunkt S_y mit der y-Achse: $f(0) = 2 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_y(0/0)$

x_1 und x_4 einfache Nullstellen (VZ-Wechsel an der x-Achse)
$x_{2,3}$ doppelte Nullstelle (kein VZ-Wechsel an der x-Achse)

Nullstellensuche: Binomische Formeln; Substitution; Polynomdivision (ganze Nst. sind ein Teiler des konstanten Gliedes)